https://jsras.rcc.edu.ly/
Vol.1 No.2 (2024), 77-87
Article history:
Received: 04 Nov. 2024
Accepted: 12 Dec. 2024
Published: 26 Dec. 2024

JSRAS
مجلة البحوث المستدامة في العلوم التطبيقية

دراسة في حل مشاكل البرمجة الخطية الضبابية

مكادة فرج محمد الزائدي [1*]، محمد معمر فرج علي [2]
[1] طالبة ماجستير أكاديمية الدراسات العليا مصراتة
[2] قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة مصراتة

[*]بريد المؤلف المراسل: moh31991966@gmail.com

الملخص:

في هذا البحث تم دراسة مشكلة البرمجة الخطية الضبابية، وتقديم تعريف المجموعة الضبابية، وكذلك تعريف الأعداد الضبابية المثلثية، والعمليات الأساسية عليها، وتم دراسة طريقة تحويل العدد الضبابي الى عدد مؤكد عند مستوى معنوية محددة واستخدام هذه الطريقة للمقارنة بين الأعداد الضبابية. وتم استخدام الأعداد الضبابية في مشاكل البرمجة الخطية حيثُ تكون المعلمات فيها غير مؤكدة نتيجة عدم الاستقرار في الحياة العملية. وتم تقديم خوارزمية لحل مشكلة البرمجة الخطية الضبابية عندما تكون بعض أو كل معاملات دالة الهدف والقيود أرقام ضبابية مثلثية مع أمثلة توضيحية للخوارزمية.

الكلمات المفتاحية: المجموعة الضبابية، الأعداد الضبابية المثلثية، البرمجة الخطية الضبابية.

1. المقدمة:

تُعد البرمجة الخطية الضبابية إحدى الأدوات الرياضية الحديثة المستخدمة لحل المشكلات التي تتسم بعدم اليقين والغموض في معطياتها. تعتمد هذه الطريقة على دمج البرمجة الخطية التقليدية مع نظرية المجموعات الضبابية، التي تم تطويرها لأول مرة بواسطة [1] بهدف التعامل مع البيانات غير الدقيقة والغامضة. في العديد من المجالات مثل الاقتصاد، الهندسة، والعلوم الإدارية، تتطلب النماذج التحليلية القدرة على التعامل مع بيانات غير مؤكدة أو ذات طابع غامض، مما يجعل البرمجة الخطية الضبابية وسيلة فعّالة لحل هذه المشاكل.

تعتمد منهجية البرمجة الخطية الضبابية على تحديد دوال الهدف (Objective Functions) والقيود (Constraints) التي تكون ضبابية في طبيعتها. ويستخدم الباحثون تقنيات مختلفة لتحويل هذه النماذج الضبابية إلى نماذج مكافئة يمكن حلها باستخدام طرق التحسين التقليدية.

تأتي أهمية دراسة هذا الموضوع من القدرة على التعامل مع مشاكل واقعية في مختلف الصناعات، حيث تكون المعطيات غالبًا غير واضحة أو غير دقيقة. ومن هنا، أصبح حل مشاكل البرمجة الخطية الضبابية محورًا أساسيًا للبحث الأكاديمي والتطبيقي، حيث طُوّرت العديد من الخوارزميات التي تهدف إلى تحسين دقة النتائج وتقليل التكاليف الحسابية. قام [1] بدراسة المجموعات الضبابية كأساس لفهم كيفية التعامل مع عدم اليقين. اقترح [2] طرقًا لحل مسائل البرمجة الخطية الضبابية وكيفية تحويل القيود إلى صيغة خطية. [3] قدما نموذجًا

رياضيًا لحل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الأعداد الضبابية، قدم [4] دراسة لنموذجًا شاملاً لتحليل البيانات الضبابية وكيفية تطبيقه على مسائل البرمجة الخطية، [5] قدم طرقًا جديدة لحل مشاكل البرمجة الضبابية باستخدام تقنيات متقدمة، سوف ندرس في هذا البحث مشكلة البرمجة الخطية الضبابية مع استخدام دالة الترتيب لحل المشكلة.

مشكلة البحث:

تتمثل مشكلة البحث في كيفية استخدام البرمجة الخطية الضبابية لحل مشاكل الإنتاج للمؤسسات. تُسلط الدراسة الضوء على مشكلة الافتراضات غير الواقعية للبرمجة الخطية التقليدية، والتي تفترض دقة المعلمات.

أهداف البحث:

1) إبراز الحاجة إلى استخدام البرمجة الخطية الضبابية في ظل وجود بيانات غير دقيقة.
2) مقارنة نتائج البرمجة الخطية الضبابية بنتائج البرمجة الخطية التقليدية.

أهمية البحث:

1) تكمن أهمية البحث في قدرة البرمجة الخطية الضبابية على التعامل بشكل أفضل مع المواقف الواقعية التي تكون فيها معلومات نماذج البرمجة الخطية غير دقيقة
2) يساهم البحث في تطوير أدوات حسابية أكثر واقعية للحصول على حلول أفضل.

2. الجانب النظري

في هذا البند سوف نقدم بعض التعريفات والمفاهيم الأساسية للمجموعة الضبابية والعمليات الأساسية عليه، [6,2,8,9] مع بعض الأمثلة التوضيحية.

تعريف 1.2 المجموعة الضبابية Fuzzy set

بفرض أن X تجمع من العناصر التي نرمز لها بالرمز x تعرف المجموعة الضبابية $\tilde{A}$ في X بأنها مجموعة الأزواج المرتبة

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)):\ x \in X\}$$

تسمى $\mu_A(x)$ درجة الانتماء (درجة العضوية) لذلك العنصر $\boldsymbol{x}$ في $\boldsymbol{\tilde{A}}$ حيثُ $\mu_A(x): X \to [0,1]$

تعريف 2.2 المجموعة الضبابية المبعثرة:

المجموعة الضبابية المبعثرة وهي المجموعة الضبابية المتقطعة والتي دالة الانتماء لها متقطعة.

فمثلاً اذا كانت $X = \{a, b, c\}$ مجموعة منتهية (وقد تكون غير منتهية)، $\mu_A: X \to [0,1]$ حيثُ

$\tilde{A} = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.6)\}$ تسمى مجموعة ضبابية مبعثرة .

تعريف 3.2 المجموعة الضبابية المتصلة:

يقال ان المجموعة الضبابية متصلة إذا كانت دالة الانتماء μ_A لها متصلة ومعرفة حيثُ

$$\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$$

فمثلاً الدالة

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.25x, & 0 \le x \le 4 \\ 0.25(8-x), & 4 \le x \le 8 \\ 0, & x \notin [0,8] \end{cases}$$

دالة متصلة.

تعريف 4.2 الارتكاز أو الإسناد للمجموعة الضبابية ($Support$) :

ارتكاز أو اسناد المجموعة الضبابية $\widetilde{A}$ ويرمز له بالرمز $sup(\widetilde{A})$ يعرف بالصيغة التالية:

$.sup(\widetilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} : \ \mu_A(x) > 0\}$

فمثلاً اذا كانت , $\widetilde{A} = \{(1,0), (2, 0.5), (3, 1), (4, 0.4)\}$ فان $sup(\widetilde{A}) = \{2,3,4\}$

تعريف 5.2 المجموعة الضبابية المحدبة *Convex fuzzy set*

المجموعة الضبابية $\widetilde{A}$ تكون محدبة إذا كان لكل $0 \le \gamma \le 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ يكون

$$\mu_A(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) \ge min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},$$

1.2 مجموعة القطع في المستوى ($\alpha - cut$)

لتكن $\widetilde{A}$ مجموعة ضبابية، $\alpha \in [0,1]$ مجموعة القطع في المستوى (مستوى المعنوية) $\alpha - \mathrm{cut}$ للمجموعة الضبابية $\widetilde{A}$ ويرمز لها بالرمز A_α تعرف بالصيغة $A_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^U] = \{x \in \mathbb{R} ; \mu_A(x)\alpha\}$

فمثلاً إذا كانت

$\widetilde{A} = \{(a, 0.1), (b, 0.4), (c, 0.2), (d, 0.8), (e, 0.7)\}$ مجموعة ضبابية، وكانت $\alpha = 0.3$ بذلك يكون $A_{0.3} = \{b, d, e\}$

تعريف 6.2 النظيم Normal

لكل مجموعة ضبابية $\widetilde{A}$ معرفة على مجموعة محدودة X يتم تعريف النظيم (العدد النسبي) $\|\widetilde{A}\|$ على الصورة $\|\widetilde{A}\| = \frac{|\widetilde{A}|}{n}$، n عدد عناصر X حيثُ $|\widetilde{A}| = \sum_{x\in X} \mu_A(x)$. من الواضح أن النظيم للمجموعة الضبابية يعتمد على عدد عناصر المجموعة الشاملة، لذلك عند المقارنة بين المجموعات الضبابية بحسب النظيم نختار نفس المجموعة الشاملة.

مثال: لنفترض أن $X = \{1,2,3, \dots, 10\}$ وإذا كانت $\tilde{A} = \{(1,0.4), (2,0.5), (3,0.6), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\}$ فإن:

$|\widetilde{A}| = 3.7$ وبالتالي يكون النظيم $\|\widetilde{A}\| = \frac{3.7}{10} = 0.37$

2.2 الأعداد الضبابية Fuzzy Numbers

يوصف الرقم الضبابي بانة أي مجموعة ضبابية لها دالة الانتماء (درجة العضوية) $\mu_A(x): \mathbb{R} \to [0,1]$ وتحقق الشروط التالية

1) توجد الأعداد الحقيقة a , b , c , d بحيثُ $a \le b \le c \le d$ وتحقق

i. دالة الانتماء $\mu_A(x)$ تزايديه على الفترة $[a, b]$

ii. دالة الانتماء $\mu_A(x)$ تناقصية على الفترة $[c, d]$

iii. لكل $b \le x \le c$ فان $\mu_A(x) = 1$

2) دالة الانتماء $\mu_A(x)$ شبة متصلة

3) $\mu_A(x) = 0$ خارج الفترة $[a, d]$

مجموعة الأعداد الضبابية تكون فضاء يسمى فضاء الأعداد الضبابية ويرمز له بالرمز $F(R)$. وسوف نقدم الآن بعض الصور المكافئة للأعداد الضبابية

تعريف 7.2 العدد الضبابية المثلثي Triangular Fuzzy Number

يعرف العدد الضبابي المثلثي $\tilde{A}$ الذي يتم تحديده بواسطة الأعداد الحقيقية $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ حيثُ $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ والتي دالة الانتماء لها تكون على الصورة التالية:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & for \quad a_1 \leq x \leq a_2 \\ , & \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & for \ , \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ , & \\ 0 & \text{فيماعدا ذلك} \end{cases}$$

3.2 العمليات الجبرية على الأعداد الضبابية المثلثية

ليكن $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3)$ عددين ضبابين مثلثين فأن

$$1. \begin{cases} \tilde{a} + \tilde{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ \quad = (a_1 + b_1, \ a_2 + b_2, \ a_3 + b_3) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \tilde{a} - \tilde{b} = (a_1, \ a_2, \ a_3) - (b_1, \ b_2, \ b_3) \\ \quad = (a_1 - b_3, \ a_2 - b_2, \ a_3 - b_1) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \tilde{a}.\tilde{b} = (a_1, a_2, a_3).(b_1, b_2, b_3) \\ \quad = (\alpha, \ a_2.b_2, \ \beta) \quad , \\ \alpha = min\{a_1.b_1, a_1.b_3, a_3.b_1, a_3.b_3\} \\ \beta = max\{a_1.b_1, \ a_1.b_3, \ a_3.b_1, \ a_3.b_3\} \end{cases}$$

مجموعة الأعداد الضبابية المثلثية تكون فضاء الأعداد المثلثية الضبابية ويرمز لها بالرمز $TF(N)$

مثال: ليكن $\tilde{a} = (2,4,6)$, $\tilde{b} = (1,3,5)$ عددين ضبابين مثلثين بالتالي فأن

$$1) \begin{cases} \tilde{a} + \tilde{b} = (1,3,5) + (2,4,6) \\ \quad = (3,7,11) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \tilde{a} - \tilde{b} = (1,3,5) - (2,4,6) \\ \quad = (-5, -1, 3) \end{cases}$$

$$3) \ \tilde{a}.\tilde{b} = (\alpha, 4 \times 3, \beta)$$

حيثُ
$$\begin{cases} \alpha = min\{2,10,6,30\} \\ \beta = max\{2,10,6,30\} \\ \tilde{a}.\tilde{b} = (2,12,30) \end{cases}$$

4.2 مستوى المعنوية للعدد الضبابي $(\alpha - cut)$

إذا كان $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3$ عدد ضبابي مثلثي، لكل $\alpha \in [0,1]$ يعُرف مستوى المعنوية $\tilde{A}_\alpha$ على الصورة:

$$\begin{cases} \tilde{A}_\alpha = [a_1^L(\alpha)\,, a_3^U(\alpha)] \\ = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha,\ \ a_3 + (a_2 - a_3)\alpha] \end{cases}$$

فمثلا اذا كانت $\tilde{A} = (1,\ 3,\ 7)$ يكون لدينا $\tilde{A}_{0.75} = [2.5\,, 4\,]\,, \tilde{A}_{0.5} = [2\,, 5\,]$

5.2 العمليات الجبرية على الفترات:

ليكن $A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2]$ حيثُ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ يكون لدينا:

1. $$\begin{cases} a + b = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] \\ \qquad = [a_1 + b_1,\ \ a_2 + b_2] \end{cases}$$
.
2. $$\begin{cases} a - b = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] \\ \qquad = [a_1 - b_2,\ \ a_2 - b_1] \end{cases}$$
.
3. $$\begin{cases} a.b\ =\ \ [a_1, a_2].[b_1, b_2] \\ \qquad = [\ \ p\ \ ,\ \ q] \\ p =\ min(a_1.b_1, a_1.b_2, a_2.b_1, a_2.b_2) \\ q = max(\ a_1.b_1, a_1.b_2, a_2.b_1, a_2.b_2) \end{cases}$$

مثال: اذا كانت b=[2 ,7] , a=[3, 5], بذلك يكون لدينا

$$\begin{cases} a + b = [3,5] + [2,7] = [5,\ \ 12], \\ a - b = [3,5] - [2,7] = [-4,\ \ 3\,], \\ \quad a.b = [3,5].\ [2,7] = [6,35]. \end{cases}$$

6.2 دالة الترتيب ***Ranking Function***

تعرف دالة الترتيب $\mathcal{R}$ حيث $\mathcal{R} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ حيث $F(\mathbb{R})$ هي مجموعة من الأعداد الضبابية المعرفة على مجموعة من الأعداد الحقيقية على الصورة [10]:

$$\mathcal{R}(\tilde{A}\,) = \frac{1}{2}\int_0^1 [A_\alpha^L + A_\alpha^U]\, d\alpha$$

حيثُ

$$\boldsymbol{A_\alpha^L = inf\,\tilde{A}\,(\alpha),\ \ A_\alpha^U = sup\tilde{A}(\alpha)}$$

وإذا كان $\tilde{A} = (a, b, c)$ عدد ضبابي مثلثي ، فإن:

$$\mathcal{R}(\tilde{A}) = \frac{1}{4}(a + 2b + c)$$

فمثلاً: إذا كان لدينا $\tilde{A} = (2,5,7)$ فإن:

$$\mathcal{R}(\tilde{A}) = \frac{2+2(5)+7}{4} = 4.75$$

مبرهنة: [10] بفرض أن $\tilde{A}, \tilde{B}$ أعداد ضبابية فإن:

1) $\tilde{A} \precsim \tilde{B} \quad iff\ \mathcal{R}(A) \le \mathcal{R}(B)$
2) $\tilde{A} \succsim \tilde{B} \quad iff\ \mathcal{R}(A) \ge \mathcal{R}(B)$
3) $\tilde{A} = \tilde{B} \quad iff\ \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$

وتستخدم دالة الترتيب في المقارنة بين الأرقام الضبابية.

3. مشكلة البرمجة الخطية الضبابية ***Fuzzy linear programming problem***

الصورة العامة لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية تكون كالتالي [4,5,9]

$$\begin{cases} Maximize\ \widetilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_J\ x_j \\ Subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, x_j \le \tilde{b}_i \qquad i = 1,2,\dots,m \\ x_J \ge 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \end{cases} \qquad (1)$$

تعريف 1.3 الحل الأمثل ***Optimal solution***

يقصد بالحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية قيمة متغير القرار التي تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف وتحقق القيود المفروضة على المتغيرات. رياضياً: نقول إن النقطة x^* نقطة حل أمثل لمشكلة البرمجة الخطية إذا كان $\widetilde{Z}(x^*) \ge \widetilde{Z}(x)$ لجميع النقاط x في فضاء الحلول الممكنة.

1.3 خوارزمية حل مشكلة البرمجة الخطية الضبابية:

لحل مشكلة البرمجة الخطية الضبابية نتبع الخطوات التالية:

- ❖ الخطوة الأولى: نستخدم مستوى المعنوية $(\alpha - cut)$ لكل المعاملات الضبابية في مشكلة البرمجة الخطية الضبابية (1) حيثُ تصبح على الصورة التالية:

$$\begin{cases} Maximize\ \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} [c_{j\alpha}^{L},\ c_{j\alpha}^{U}]\ x_j \quad , \quad \boldsymbol{\alpha\epsilon[0,1]} \\ Subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} [a_{ij\alpha}^{L},\ a_{ij\alpha}^{U}]\, x_j \le [b_{i\alpha}^{L},\ b_{i\alpha}^{U}] \quad i = 1,2,\dots,m \\ x_J \ge 0, \qquad j = 1,2,\dots,n \end{cases} \qquad (2)$$

- ❖ الخطوة الثانية: نستخدم دالة الترتيب لتحويل الفترات $\tilde{c}_{J\alpha}, \tilde{a}_{iJ\alpha}, \tilde{b}_{i\alpha}$ الى قيم مفردة حيثُ

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\tilde{c}_J) = \frac{1}{2}\int_0^1 (c_{j\alpha}^L + c_{j\alpha}^U)\, d\alpha \\ \mathcal{R}(\tilde{a}_{iJ}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (a_{ij\alpha}^L + a_{ij\alpha}^U)\, d\alpha \\ \mathcal{R}(\tilde{b}_i) = \frac{1}{2}\int_0^1 (b_{i\alpha}^L + b_{i\alpha}^U)\, d\alpha \end{cases}$$

وبذلك نحصل على مشكلة البرمجة الخطية على الصورة:

$$\begin{cases} Max\ \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}(\tilde{c}_J)\ x_J \\ Subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}(\tilde{a}_{ij})\, x_j \leq \mathcal{R}(b_i) \qquad i = 1,2,\dots,m \\ x_J \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n \end{cases} \qquad (3)$$

- الخطوة الثالثة: نستخدم طريقة السمبلكس أو *solver* للحصول على الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية (3)

2.3 مثال **تطبيقي:**

مصنع للأثاث المنزلي والمكتبي يصُنع ثلاث أنواع من الأثاث (كراسي، طاولات، مكتبات) وكانت الأرباح المتوقعة للوحدة الواحدة هي ($\widetilde{20}$ ، $\widetilde{35}$ ، $\widetilde{30}$) دينار على الترتيب، والجدول التالي يوضح عدد الساعات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من الأثاث والوقت المتاح خلال الأسبوع (جدول 1):

جدول 1 يوضح عدد الساعات اللازمة لانتاج وحدة واحدة من الأثاث والوقت المتاح خلال أسبوع

	قسم الإنتاج	قسم الطلاء	قسم التغليف	الأرباح المتوقعة
كراسي	3	2	1	$\widetilde{20}$
طاولات	4	1	3	$\widetilde{35}$
مكتبات	2	2	2	$\widetilde{30}$
الساعات المتاحة	$\widetilde{60}$	$\widetilde{40}$	$\widetilde{80}$	

سوف نستخدم طريقة السمبلكس لمعرفة عدد الكراسي والطاولات والمكتبات التي يمكن تصنيعُها لتحقيق أكبر ربح ممكن خلال الأسبوع في ظل الإمكانيات المتاحة

لتكوين المشكلة في الشكل الرياضي لمشاكل البرمجة الخطية الضبابية نتبع الاتي:

سوف نرمز للوحدة الواحدة المُصنعة من الكراسي بالرمز x_1 ، ونرمز للوحدة الواحدة المُصنعة من الطاولات بالرمز x_2 ، نرمز للوحدة الواحدة المُصنعة من المكتبات بالرمز x_3 وبالتالي تكون المسألة علي الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \tilde{Z} = \widetilde{20}\, x_1 + \widetilde{35}\, x_2 + \widetilde{30}\, x_3 \\
&Subject\ to \quad 3\, x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le \widetilde{60} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le \widetilde{40} \\
&\qquad x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le \widetilde{80} \\
&\qquad x_1\ , x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

إذا اعتبرنا الأرباح والساعات المتاحة هي أعداد ضبابية مثلثية ثلاثية معطاه كالتالي:

$$\begin{cases}
\widetilde{20} = (15, 20, 25), & \widetilde{35} = (30,\ 35,\ 45), \\
\widetilde{30} = (27, 30,\ 35), & \widetilde{60} = (50, 60,\ 65) \\
\widetilde{40} = (30, 40, 55), & \widetilde{80} = (70, 80,\ 85)
\end{cases}$$

✓ الخطوة الأولى: نحسب مستوى المعنوية $(\boldsymbol{\alpha - cut})$ لكل المعاملات الضبابية المعطاة وبذلك نحصل على الفترات التالية

.

$$\begin{cases}
\widetilde{20}_{\boldsymbol{\alpha}} = [15 + 5\,\boldsymbol{\alpha}\,, 25 - 5\boldsymbol{\alpha}], \\
\widetilde{35}_{\boldsymbol{\alpha}} = [30 + 5\,\boldsymbol{\alpha}\,, 45 - 10\boldsymbol{\alpha}], \\
\widetilde{30}_{\boldsymbol{\alpha}} = [27 + 3\boldsymbol{\alpha}\,, 35 - 5\boldsymbol{\alpha}], \\
\widetilde{60}_{\boldsymbol{\alpha}} = [55 + 10\boldsymbol{\alpha}\,,\ \ 65 - 5\boldsymbol{\alpha}], \\
\widetilde{40}_{\boldsymbol{\alpha}} = [30 + 10\boldsymbol{\alpha}\,,\ \ 55 - 15\boldsymbol{\alpha}], \\
\widetilde{80}_{\boldsymbol{\alpha}} = [70 + 10\,\boldsymbol{\alpha}\,,\ \ 85 - 5\boldsymbol{\alpha}].
\end{cases}$$

✓ الخطوة الثانية: نستخدم دالة الترتيب لتحويل الفترات الى قيم مؤكدة عند مستوى معنوية محدد كما يلي:

$$\mathcal{R}\left(\widetilde{\mathbf{20}}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (40)\ d\alpha = 20$$

وبالمثل يمكن الحصول على بقية القيم حيثُ

$$\begin{cases}
\mathcal{R}\left(\widetilde{\mathbf{35}}\right) = 36.25\,, \mathcal{R}\left(\widetilde{\mathbf{30}}\right) = 30.5\,, \\
\mathcal{R}\left(\widetilde{\mathbf{60}}\right) = 58.75, \mathcal{R}\left(\widetilde{\mathbf{40}}\right) = 41.25, \\
\mathcal{R}\left(\widetilde{\mathbf{80}}\right) = 78.75
\end{cases}$$

وبذلك نحصل على مشكلة البرمجة الخطية على الصورة التالية:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z = 20\, x_1 + 36.25\, x_2 + 30.5\, x_3 \\
&Subject\ to\colon\ 3\, x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 58.75 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 41.25 \\
&\qquad x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 78.75 \\
&\qquad x_1\ , x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

✓ الخطوة الثالثة: نستخدم برنامج *solver* فنتحصل على الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية حيثُ

$$\begin{cases} x_1 = 0\,,\;\; x_2 = 5.833, \qquad x_3 = 17.708 \\ Z = 751.562 \end{cases}$$

وحيثُ أن المشكلة تتعلق بإنتاج عدد من الكراسي والطاولات والمكتبات فمن غير المنطقي تكون أعداد كسرية ويتم التقريب بما يتناسب مع القيود. وبالرجوع للمشكلة الأصلية يكون الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية:

$$\begin{cases} x_1 = 0\,,\;\; x_2 = 6,\;\; x_3 = 18 \\ \tilde{Z} = (666,\;\; 750,\;\; 900) \end{cases}$$

والذي يعني من الناحية العملية عدم الإنتاج من النوع الأول (الكراسي)، وإنتاج عدد 6 طاولات وكذلك إنتاج عدد 18 من المكتبات وسيكون الربح المتحقق خلال الأسبوع $\widetilde{750}$ دينار حيثُ

$$\tilde{Z} = \widetilde{750} = (666, 750,\;\; 900)$$

3.3. مشكلة البرمجة الخطية الضبابية التامة:

في هذه الحالة تكون جميع معلمات مشكلة البرمجة الخطية أعداد ضبابية مثلثية وبذلك يمكن صياغة المشكلة على الصورة التالية:

$$\begin{cases} Max\ \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_J\ \tilde{x}_J \\ Subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\,\tilde{x}_J = \tilde{b}_i \qquad i = 1,2,\dots,m \\ \qquad \tilde{x}_J \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

خوارزمية الحل: لحل مشكلة البرمجة الخطية الضبابية التامة نتبع الخطوات التالية:

✓ تمثيل كافة المتغيرات $\tilde{c}_j,\ \tilde{a}_{ij},\ \tilde{x}_j,\ \tilde{b}_i$ بأعداد ضبابية مثلثية معرفة على الصورة :

$$(p_j, q_j, r_j), \left(a_{ij}, b_{ij}, c_{i_j}\right), (x_j, y_j, z_j), \;\; (b_i, g_i, h_i)$$

فيمكن كتابة مشكلة البرمجة الخطية الضبابية التامة على النحو التالي

$$\begin{cases} Max\ \ \tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} (p_j, q_j, r_j)(x_j, y_j, z_j) \\ subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}, b_{ij}, c_{i_j}\right)(x_j, y_j, z_j) \leq (b_i, g_i, h_i) \\ \qquad x_j, y_j, z_j \geq 0 \end{cases}$$

✓ باستخدام عملية الضرب للأعداد الضبابية سوف نعتبر أن

$$\left(a_{ij}, b_{ij}, c_{i_j}\right)(x_j, y_j, z_j) = (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij})$$

وبذلك يمكن كتابة مشكلة البرمجة الخطية الضبابية التامة على النحو التالي:

$$\begin{cases} Max\tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} (p_j, q_j, r_j).(x_j, y_j, z_j) \\ \quad subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij}) \leq (b_i, g_i, h_i) \\ \quad x_j, y_j, z_j \geq 0 \end{cases}$$

✓ نستخدم دالة الترتيب لتحويل مشكلة البرمجة الخطية الضبابية التامة إلى مشكلة البرمجة الخطية الاعتيادية على الصورة:

$$\begin{cases} Max\tilde{Z} = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}\left\{(p_j, q_j, r_j).(x_j, y_j, z_j)\right\} \\ \quad subject\ to: \\ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}\ (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij}) \leq \mathcal{R}\ (b_i, g_i, h_i) \\ \quad x_j, y_j, z_j \geq 0 \end{cases}$$

✓ البحث عن الحل الأمثل باستخدام برنامج solver لحل مشكلة البرمجة الخطية الاعتيادية.

الان سوف نستخدم هذه الخوارزمية في ايجاد الحل الامثل لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية التامة التالية:

$$\begin{cases} Max\ \tilde{Z} = \ (1,2,3)\tilde{t}_1 + (2,3,4)\tilde{t}_2 \\ \quad subject\ to: \\ (0,1,2)\tilde{t}_1 + (1,2,3)\tilde{t}_2 \leq (2,10,24) \\ (1,2,3)\tilde{t}_1 + (0,1,2)\tilde{t}_2 \leq (1,8,21) \\ \quad \tilde{t}_1,\ \ \tilde{t}_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل: نفرض أن:

$$\tilde{t}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \ \tilde{t}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

بذلك يكون لدينا

$$\begin{cases} Max\ \ \tilde{Z} = \ (1,2,3)(x_1, y_1, z_1) + (2,3,4)(x_2, y_2, z_2) \\ subject\ to: \\ (0,1,2)(x_1, y_1, z_1) + (1,2,3)(x_2, y_2, z_2) \leq (2,10,24) \\ (1,2,3)(x_1, y_1, z_1) + (0,1,2)(x_2, y_2, z_2) \leq (1,8,21) \\ \quad x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \geq 0 \end{cases}$$

نستخدم دالة الترتيب للحصول على مشكلة برمجة خطية اعتيادية على الصورة:

$$\begin{cases} Max\ Z = 0.25x_1 + 0.5x_2 + y_1 + 1.5y_2 + 0.75z_1 + z_2 \\ subject\ to: \qquad , \\ 0.25x_2 + 0.5y_1 + y_2 + 0.5z_1 + 0.75z_2\ \leq 11.5 \\ 0.25x_1 + y_1 + 0.5y_2 + 0.75z_1 + 0.5z_2 \leq 9.5 \\ \quad x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \geq 0 \end{cases}$$

باستخدام برنامج solver لحل مشكلة البرمجة الخطية نحصل على الحل الامثل حيثُ:

$$x_1 = 2.5\ , y_1 = 2.5\ , z_1 = 2.5\ ,$$

$$x_2 = 4.5\,, y_2 = 4.5\,, z_2 = 4.5\ ,$$
$$Z = 18.5$$

وبذلك فان الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الضبابية هو $\tilde{t}_1 = (2.5\ ,2.5, 2.5), \tilde{t}_2 = (4.5,4.5,4.5)$ حيثُ

$$\widetilde{Z} = (11.5, \quad 18.5, \quad 29.5\,)$$

4.النتائج:

خلصت الدراسة إلى أن الأعداد الضبابية تقدم تحسينات ملحوظة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية في بيئات غير مؤكدة، حيثُ تكون هناك مرونة في التعامل مع المشكلة وإعطاء عدد اكثر من الحلول لصانع القرار، حيثُ تم استخدام دالة الترتيب لتحويل الاعداد الضبابية الى ارقام مؤكدة عند مستوى معنوية معينة واقتراح خوارزمية لحل مشكلة البرمجة الخطية الضبابية و الحصول على الحل الامثل، وتم توضيح الخوارزمية من خلال استعراض مثال تطبيقي والحصول على نتائج اكثر مرونة لصانع القرار.

5.المراجع:

[1] Zadeh LA. Fuzzy sets. Inf Control. 1965;8(3):338-353.

[2] Zimmermann HJ. Fuzzy Set Theory and Its Applications. Springer Science & Business Media; 1991.

[3] Kaufmann A, Gupta MM. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science. North-Holland; 1985.

[4] Huang HJ, Wang YM. A fuzzy linear programming model for decision-making under uncertainty. Expert Syst Appl. 2011;38(4):4450-4457.

[5] Zhang J, Wu J. Fuzzy Optimization Theory and Applications. Springer; 2006.

[6] Winston WL. Operations Research: Applications and Algorithms. Cengage Learning; 2004.

[7] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press; 1980.

[8] Gonzalez MM. Fuzzy linear programming for project management: a case study. Computers Operations Research. 1998;25(5):409-424.

[9] Hosseini SH, Niknam T. Fuzzy linear programming approach to optimization of energy management in a power system. Energy Convers Manag. 2008;49(7):2058-2064.

[10] Liou T, Wang M. Ranking fuzzy numbers with integral value. Fuzzy Sets Syst. 1992;50:247-255.

[11] Muamer M, Eljerbib T. Solving linear fractional programming problems with triangular L-R fuzzy numbers coefficients. In: Sebha University Conference Proceedings. 2024;3(2).